

音の波数領域信号処理 平面波・円調和・球面調和関数展開とアレー信号処理

著者	羽田 陽一
雑誌名	電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review
巻	11
号	4
ページ	243-255
発行年	2018-04-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1438/00009273/

doi: 10.1587/essfr.11.4_243

音の波数領域信号処理

—平面波・円調和・球面調和関数展開とアレイ信号処理

Audio signal processing in wavenumber domain

—Plane wave, circular harmonic, spherical harmonic expansions and array signal processing

羽田陽一 Yoichi HANEDA

アブストラクト マイクロホン素子やスピーカ素子を複数個並べたアレイ信号処理は、音の空間情報を扱えるため、さまざまな応用において重要な役割を果たしている。本解説では、直線上、円周上、球面上に配置された素子位置に対する空間フーリエ変換の基礎について、波動方程式の解から出発して概説する。また、波面合成や指向性制御といった応用を波数領域で行う方法についても合わせて説明する。

キーワード 空間フーリエ変換, アレイ信号処理, 波数領域, 平面波展開, 円調和展開, 球面調和関数

Abstract Array signal processing with multiple microphones or loudspeakers is important for various applications because they can use the spatial information. This article explains the fundamentals of the spatial Fourier transforms for the linear array, circular array and spherical array from point of view of wave equation. Array processing methods in wavenumber domain for the wave field synthesis and directivity control are also described.

Key words Spatial Fourier transform, array signal processing, wavenumber, plane wave decomposition, circular harmonics, spherical harmonics

1. はじめに

マイクロホンやスピーカ素子を複数個並べた音のアレイ信号処理は様々な応用において大変重要である。マイクロホンアレイ⁽¹⁾は、音源位置推定や音源分離、雑音抑圧等において威力を発揮し、スピーカアレイは音の指向性再生や高臨場感再生⁽²⁾に用いられる。これらの技術は、マイクロホンやスピーカ素子に括りつけられたフィルタ係数をその目的に合わせて設計する問題としてとらえられるが、素子の空間上の配置に対して空間フーリエ変換を行うことで、アレイ全体として波数領域のフィルタ係数として求めることもできる。本解説記事では、直線、円、球面上において素子が等間隔で並んでいる場合に対する空間フーリエ変換⁽³⁾と、空間フーリエ変換後の波数領域でのアレイ処理について解説を行う。特に、空間フーリエ変換を行うことが、単に数学上のテクニックではなく、波動方程式の解と関連付けることで、音の物理的な性質を利用しやすくなるというメリットについて述べる。

2. 1次元の波動方程式とフーリエ変換

音は波なので、物理的に考えると波動方程式に従う⁽⁴⁾。今、 x

軸に沿って進行する1次元の音波 $p(x, t)$ が従う波動方程式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, t) \quad (1)$$

である。ここで、 c は音速、 t は時間である。この波動方程式の解の一つに

$$p(x, t) = P(\omega) e^{-jkx} e^{j\omega t} \quad (2)$$

がある。 $P(\omega)$ は波の(複素)振幅、 ω は角周波数、 $k = \omega/c$ は波数である。また、波動方程式は線形の微分方程式なので異なる角周波数の独立な解の重ね合わせも解となる。

$$p(x, t) = \sum_{\omega} P(\omega) e^{-jkx} e^{j\omega t} \quad (3)$$

さて、位置 x を原点に固定して音を観測することを考える。すると、式(3)は、 x 依存性を省略して書けば、

$$p(t) = \sum_{\omega} P(\omega) e^{j\omega t} \quad (4)$$

となり、私たちがよく目にするフーリエ級数展開となる。音波があらゆる周波数の複素正弦波の重ね合わせで表現できるというフーリエ級数展開は波動方程式の解として得られる。ここで、式(4)の和を $-\infty < \omega < \infty$ の積分に置き換え、複素正弦波の直交性を利用すれば、厳密な言い回しではないが、式(4)の逆変換としてフーリエ変換⁽⁵⁾が得られる。

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

一方で、時刻を固定(例えば、 $t = 0$)し、位置 x に関して音を観測することを考える。 t の項を省略すると、

羽田陽一 正員：シニア会員 電気通信大学 大学院情報理工学専攻
E-mail haneda.yoichi@uec.ac.jp
Yoichi HANEDA, Senior Member (Department of Informatics, Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585, Japan).
電子情報通信学会 基礎・境界サイエティ
Fundamentals Review Vol.xx No.xx pp.1-13 xxxx 年 xx 月
©電子情報通信学会 xxxx

$$p(x) = \sum_k \tilde{P}(k) e^{-jkx} \quad (6)$$

が成り立つ。 $\tilde{P}(k)$ は波数 k の波の（複素）振幅である。1 次元の場合、 $k = \omega/c$ なので、 ω を波数 k で置き換えた。ここでも複素正弦波の直交性を利用することで、1 次元の空間フーリエ変換を定義することができる。

$$\tilde{P}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jkx} dx \quad (7)$$

以上のことから、フーリエ変換をどのような基底で行うかについては波動方程式の解と関連付けて考えられることがわかる。

ただし、一般に 1 次元の音波は波数が周波数と一対一に対応しているため、空間フーリエ変換を行うにはあまり興味深い問題とは言えない。そこで、以降では、2 次元以上の音波に関する空間フーリエ変換を波動方程式の解と結び付けて説明を行う。このとき、座標系をデカルト座標系から円筒座標系、および球面座標系に変換することによって異なる基底の空間フーリエ変換が得られることを章を分けて説明する。

3. デカルト座標系と平面波展開

3.1 デカルト座標系における 3 次元波動方程式

3 次元のデカルト座標系 (x, y, z) で観測した音圧を $p(x, y, z, t)$ とすると、3 次元の波動方程式は以下のように書ける。

$$\nabla^2 p(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, y, z, t) \quad (8)$$

ただし、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9)$$

である。この波動方程式の解は、解がそれぞれの変数の関数に分離できるとする変数分離法により求めることができる。例えば、それぞれの変数の関数を大文字で表すとすると、解は

$$p(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (10)$$

であろうとして解く⁽³⁾。その結果、わたしたちは解の一つとして以下を得る。

$$p(x, y, z, t) = A(k_x, k_y, \omega) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \quad (11)$$

ここで、 k_x, k_y, k_z はそれぞれの軸に対する見かけの波数であり、周波数に対応する基本的な波数 k と $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ の関係がある。式 (11) は単一周波数 ω の単一の方向に進行する 3 次元空間内での平面波を表している。時間依存性を省略し、位置を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、波数ベクトルを $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ とすると、大きさ 1 の平面波は $e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{r}}$ と記述できる。

3.2 見かけの波数とは何か？

以降では、見かけの波数と空間フーリエ変換の説明を簡単に

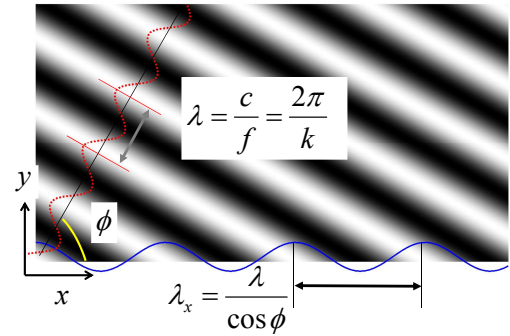


図 1 平面波の進行方向と見かけの波長との関係

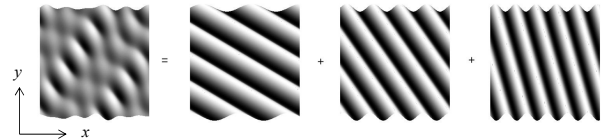


図 2 2 次元平面における任意の音場の平面波展開

行うため、 z 軸に対して音波は一様であるとしてその依存性を無視し、 xy 平面内で話を進める。また、信号は時間・周波数フーリエ変換により単一周波数 ω の信号に分解済みであるとし、 t と ω も誤解のない範囲で省略する。このとき、さきほどの解は

$$p(x, y) = A(k_x) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \quad (12)$$

と書ける。ここで、 $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ であることから、 k_y は k_x と独立に与えることはできなくなり、波の大きさを表す $A(k_x)$ の変数は片方だけ（ここでは k_x を選択）になる。式 (12) は、空間上における音圧 $p(x, y)$ は、 x 軸方向に進行する波と、 y 軸方向に進行する波とに分解可能であることを示しており、空間全体としては図 1 に示すような 2 次元平面内をある角度 ϕ で進行する平面波を与える。

ところで見かけの波数 k_x とは何を表しているのか？今、図 1 に示した角度 ϕ で進行する平面波を x 軸上で観測することを考える。このとき、平面波がもともと持っている波長を λ とすると、図から見かけの波長は $\lambda_x = \lambda / \cos \phi$ となる。波数と波長の関係 $k_x = 2\pi / \lambda_x$ を使うと、 x 軸上から見かけの波数は $k_x = k \cos \phi$ となる。つまり、波数 k_x は、 x 軸方向で観測される波の数であり、周波数 ω の平面波が到来するときの進行角度に対応することが分かる。

3.3 平面波展開と角度スペクトル

さて、1 次元の場合と同様に波動方程式の一般解は波数の異なる独立な解を重ね合わせたものとなる。

$$p(x, y) = \sum_{k_x} A(k_x) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \quad (13)$$

この式は、任意の場所の音圧はあらゆる波数、すなわちあらゆる方向から到来する平面波の和として表現できることを示しており、音の平面波展開を表している。平面波展開とは例えば図 2 に示すように、左側の波面を右側の 3 つの平面波に分解するようなイメージである。実際の図では、右側の 3 つの平面波の

和が左側の波面になっている。

このとき、空間フーリエ変換とは、左の波面を右の各平面波に展開し、そのときの展開係数 $A(k_x)$ を求めることに相当する。今、展開係数が k_x にのみ依存しているので、波動方程式の解の基底である $e^{-jk_x x}$ を空間フーリエ変換の基底として採用することで、 x 軸上に沿った空間フーリエ変換が定義できる。

$$\tilde{P}(k_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{jk_x x} dx \quad (14)$$

ここで、 $\tilde{P}(k_x, y)$ は、 $k_x = k \cos \phi$ が平面波の進行角度 ϕ に対応していることから、角度スペクトルと呼ばれる⁽³⁾。角度スペクトル $\tilde{P}(k_x, y)$ が分かれば、観測している音場領域においてどの方向から到来する平面波がどれくらいの大きさと位相で到来するかがわかることになる。ちなみに、 k_x は $k_x = k \cos \phi$ なので、 k より大きくならないと思われるかもしれないが、式 (14) では、 k を超える k_x を与えることも可能であり、このときは $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ が虚数となり、進行しないエバネッセント波成分が現れる⁽³⁾。

さて、式 (13) と式 (14) を見比べることにより私たちは空間フーリエ変換のメリットの一つである音圧の内挿・外挿関係式を得る。例えば、 $y = 0$ での角度スペクトルは、 $\tilde{P}(k_x, 0) = A(k_x)$ なので、

$$\hat{p}(x, y) = \sum_{k_x} \tilde{P}(k_x, 0) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \quad (15)$$

が成り立ち、 $y = 0$ で x 軸に平行に音圧 $p(x, 0)$ を観測し、空間フーリエ変換により角度スペクトルを計算すれば、位置 (x, y) の音圧が予測できることを示している。

3.4 自由空間伝達関数の平面波展開

音源から受音点までの音の伝わりの様子を表す伝達関数の空間フーリエ変換を知ることは重要である。今、自由空間内において、音源と受音点のいずれか一方を原点 $(0, 0, 0)$ 、他方の位置を (x, y, z) とし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とすると、2点間の伝達関数は、

$$G(x, y, z) = \frac{e^{-jk_r}}{4\pi r} \quad (16)$$

である。今、この伝達関数を式 (14) に代入し、 x 軸方向に空間フーリエ変換を行うと、 $|k_x| < |k|$ では、

$$\tilde{G}(k_x, y, z) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)} \left(\sqrt{k^2 - k_x^2} \sqrt{y^2 + z^2} \right) \quad (17)$$

となる⁽⁶⁾。ここで、 $H_0^{(2)}(\cdot)$ は 0 次の第二種ハンケル関数である^(注1)。

また、理論的な解析解を求める際に 2 次元空間内での伝達関数を利用することがたびたびあるので、ここでは 2 次元伝達関数とその空間フーリエ変換についても記述する。原点からの位

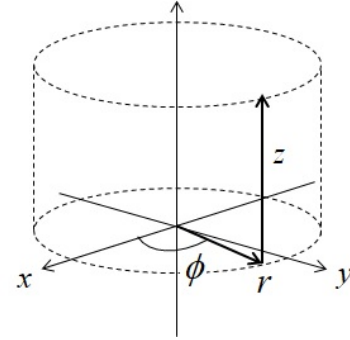


図3 円筒（円柱）座標系

置を (x, y) とし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると、2次元自由空間内の伝達関数は、

$$G^{(2D)}(x, y) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (18)$$

であり、その空間フーリエ変換は、

$$\tilde{G}^{(2D)}(k_x, y) = -\frac{j}{2} \frac{\exp \left(-j \sqrt{k^2 - k_x^2} y \right)}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \quad (19)$$

であることが知られている⁽⁷⁾。

4. 円筒座標系とヘリカル波展開

4.1 円筒座標系における 3 次元波動方程式

直線アレイや平面アレイを扱う場合にはデカルト座標系の空間フーリエ変換が適しているが、円上、あるいは円筒上に素子が配置されたアレイに対して式 (14) の空間フーリエ変換をそのまま適用することは効率的ではない。このような場合には、波動方程式を円筒（円柱）座標系に変換し、その解の一部を基底とする空間フーリエ変換⁽³⁾を用いるほうが適している。

今、図3に示すように位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を (r, ϕ, z) で表す円筒（円柱）座標系を導入する。

$$x = r \cos \phi \quad (20)$$

$$y = r \sin \phi \quad (21)$$

$$z = z \quad (22)$$

式 (8) における音圧 $p(x, y, z, t)$ を $p(r, \phi, z, t)$ に置き換え、さらに、 ∇^2 を

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (23)$$

とすることで、円筒座標系に変数変換された波動方程式を得ることができる。この波動方程式もデカルト座標系のときと同様に変数分離を使って解の形式を

$$p(r, \phi, z, t) = R_c(r) \Phi_c(\phi) Z(z) e^{j\omega t} \quad (24)$$

と仮定することで解けることが知られている。実際、解は 3 つ

(注1)：以降でもハンケル関数やベッセル関数といった特殊関数が現れるが、MATLAB などでは function として用意されているので使い方とその性質さえ押さえておけば恐れることはない。

の軸と時間項に分離可能であり、3次元の波を動径方向 r の波、 ϕ 方向（円周方向）の波、 z 方向の波に分解して表現できる。この解のうち、半径 r より外に音源がある場合に内部の音場を表現するため（内部問題）の解は、

$$p(r, \phi, z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} J_n(k_r r) dk_z \quad (25)$$

であり、半径 r より内側に音源があり、外側の音場を表現する場合（外部問題）の解は、

$$p(r, \phi, z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\phi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(k_z, \omega) e^{jk_z z} H_n^{(2)}(k_r r) dk_z \quad (26)$$

である⁽³⁾。ここで、 n は展開次数、 $C_n(k_z, \omega)$ 、 $A_n(k_z, \omega)$ は展開係数、 $J_n(k_r r)$ はベッセル関数、 $H_n^{(2)}(k_r r)$ は第二種ハンケル関数であり、波動方程式を解くときに現れるベッセル方程式の解になっている ($k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$)。教科書や文献によっては第一種ハンケル関数（第二種ハンケル関数とは共役関係にある）が用いられることもあるが、波の時間周波数依存性を $e^{j\omega t}$ とするか $e^{-j\omega t}$ とするかによって入れ替わり、本解説では $e^{j\omega t}$ を用いているため第二種ハンケル関数を採用している。また、 n は、周方向の解が一周したら元の振幅に戻る周期的な信号でなければならない、すなわち $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ を満たさなければならないことから整数となる。

これらの解は波を円筒波（ヘリカル波）(herical: らせん状)として展開していることになるが、円筒波がどのような波であるかを3次的に図示することは難しい。そこで、式 (26) の半径 r を固定した場合の $n = 3$ の波の例を図4に示す。この図からも想像できるように、円筒波の時間的推移はいわゆるサインボールとして観察することができる。一方、 z 軸を固定した場合には、 $n = 3$ の波は図5に示すようになる。もっともこれらの図は、 $e^{jk_z z}$ 、 $e^{jn\phi}$ 、 $H_n^{(2)}(k_r r)$ あるいは $J_n(k_r r)$ の積であることからそれぞれのグラフを見れば、各軸に対する依存性を読み取ることはできる。 $e^{jk_z z}$ は単なる複素正弦波なので省略するが、 $e^{jn\phi}$ と $J_n(k_r r)$ について図6と図7に示す。

大雑把に言えば、円筒波展開をするということは、ここで図示したような成分に波を分解することに相当する。したがって、円筒座標系における空間フーリエ変換は、このような波に分解したときの展開係数である $C_n(k_z, \omega)$ や $A_n(k_z, \omega)$ を求める手法ということになる。

4.2 円調和展開と円調和スペクトル⁽³⁾

さて、展開係数を求めるにあたり、話を簡略化するために z 軸依存性を一様と考え、省略することとする。すると、例えば式 (25) は、

$$p(r, \phi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega) J_n(kr) e^{jn\phi} \quad (27)$$

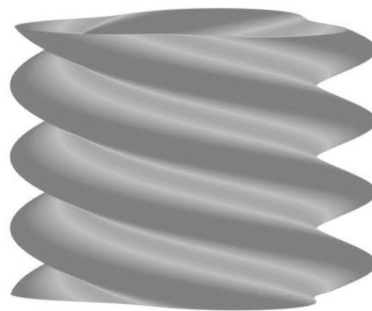


図4 円周方向に回転しながら z 軸方向に進む波。ただし、動径方向については表示を省略。

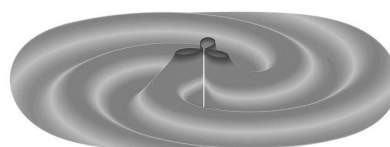


図5 円周方向に回転しながら動径方向（半径方向）の外側に進行する波。中心付近の振幅の大きな成分はカットした。 z 軸方向への進行の表示を省略。

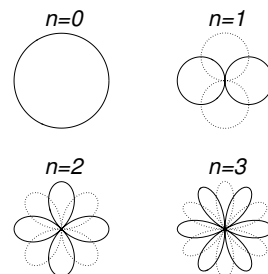


図6 円調和展開の基底となる $e^{jn\phi}$ を $n = 0, \dots, 3$ まで極座標で表示。

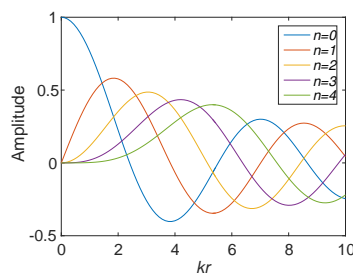


図7 ベッセル関数。横軸に kr 、縦軸にベッセル関数の出力。

となる。ここで、 $e^{jn\phi}$ に着目し、半径 r の円周上で観測された音圧 $p(r, \phi, \omega)$ を円周方向に空間フーリエ変換することを考える。

$$\tilde{P}_n(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \phi, \omega) e^{-jn\phi} d\phi \quad (28)$$

$e^{jn\phi}$ は円調和関数と呼ばれ、逆空間フーリエ変換は円調和展開となる。

$$p(r, \phi, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{P}_n(r, \omega) e^{jn\phi} \quad (29)$$

$\tilde{P}_n(r, \omega)$ は円調和スペクトルと呼ばれており、次数 n は、円周上に入る波の数を表しており、円周上の波数と $k_\phi = n/r$ の関係がある。円周方向のフーリエ変換は、円周上の音圧を $e^{jn\phi}$ の成分ごとに分解していることに相当する。図 6 に示した $n = 0$ から 2 までの $e^{jn\phi}$ の図から、 $n = 0$ はモノポール成分、 $n = 1$ はダイポール成分、 $n = 2$ はクワドラポール成分に対応していることが想像できる。つまり、円調和スペクトルに分解することは、モノポールやダイポールといった指向性パターンに分解していることに相当しているとも解釈できる。

さて、式 (27) から式 (29) を見比べることによって私たちは半径 r の円周上で観測した音圧から半径 a の円周上の音圧を得るための重要な内挿式を得る。

$$\tilde{P}_n(a, \omega) = \frac{J_n(ka)}{J_n(kr)} \tilde{P}_n(r, \omega) \quad (30)$$

ただし、ベッセル関数がちょうど 0 になる場合には利用できないことがあることに注意が必要である。外部問題ではベッセル関数がハンケル関数に置き換わることになる。

4.3 平面波と自由空間伝達関数の円調和展開

アレイ信号処理を行うにあたり、伝達関数以外に平面波を扱う機会が多い。平面波展開ではそもそも平面波を平面波として展開しているのでその展開形式を示す必要がなかったが、ここでは応用上においても大変重要となる平面波の円調和展開を示す。平面波の円調和展開はヤコビ・アンガーの公式⁽⁸⁾として知られている。

$$e^{jkr \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(kr) e^{jn\theta} \quad (31)$$

この式は、 $\theta = \phi_T - \phi_o$ とすることで、 ϕ_T から到来する平面波を半径 r の円周上の角度 ϕ_o の位置において観測した音圧の円調和展開を与える。

次に、2 次元平面内において、音源位置 $\mathbf{r}_s = (r_s, \phi_s)$ から受音点位置 $\mathbf{r}_o = (r_o, \phi_o)$ まで（ただし、 $r_o < r_s$ ）の自由空間伝達関数（式 (18) と同じ）とその円調和展開を示す。

$$G^{(2D)}(\mathbf{r}_o|\mathbf{r}_s) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|) \quad (32)$$

$$= -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr_o) H_n^{(2)}(kr_s) e^{jn(\phi_o - \phi_s)}$$

5. 球座標系と球面調和関数展開

本章では、球面上で観測した音に対する球座標系に変数変換した波動方程式の解を基底とする空間フーリエ変換について述べる。

5.1 球座標系における 3 次元波動方程式⁽³⁾

今、図 8 に示すように位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を (r, θ, ϕ) で表す球（極）座標系を導入する。

$$x = r \cos \phi \sin \theta \quad (33)$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta \quad (34)$$

$$z = r \cos \theta \quad (35)$$

式 (8) における音圧 $p(x, y, z, t)$ を $p(r, \theta, \phi, t)$ に置き換え、さらに、 ∇^2 を

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (36)$$

とし、波動方程式を変数変換する。この波動方程式もデカルト座標系のときと同様に変数分離を使って解の形式を

$$p(r, \theta, \phi, t) = R_s(r) \Theta_s(\theta) \Phi_s(\phi) e^{j\omega t} \quad (37)$$

と仮定することで解けることが知られている。

この解のうち、半径 r より外に音源がある場合に内部の音場を表現するため（内部問題）の解は、

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm}(\omega) j_n(k_r r) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (38)$$

であり、半径 r より内側に音源があり、外側の音場を表現する場合（外部問題）の解は、

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}(\omega) h_n^{(2)}(k_r r) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (39)$$

である。ここで、 n, m は展開次数、 $C_{nm}(\omega)$ 、 $A_{nm}(\omega)$ は展開係数、 $j_n(k_r r)$ は球ベッセル関数、 $h_n^{(2)}(k_r r)$ は第二種球ハンケル関数^(註2)、 $Y_n^m(\theta, \phi)$ は以下で定義される球面調和関数である。

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi}, \quad (40)$$

ここで、 $P_n^m(\theta, \phi)$ はルジャンドル倍関数であり、 n, m は整数

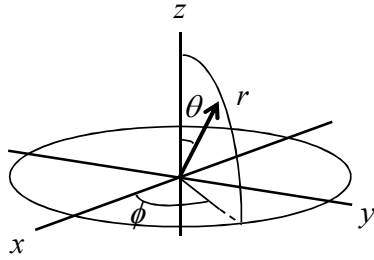


図 8 球極座標系.

である。

5.2 球面調和関数展開

球座標系で表した波動関数の一般解に現れる球面調和関数 $Y_n^m(\theta, \phi)$ ($n = 0, 1, \dots, m = -n, -n+1, \dots, n$) は、 $e^{-jn\phi}$ と同様に直交関数であり、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (41)$$

と

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi')^* = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (42)$$

が成り立つため、半径 r の球面上の任意の音圧 $p(r, \theta, \phi)$ を以下のように展開でき、

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n P_{nm}(r) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (43)$$

展開係数 $P_{nm}(r)$ は、

$$P_{nm}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(r, \theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta d\phi, \quad (44)$$

により求められる。この式は、 $Y_n^m(\theta, \phi)$ を基底とする空間フーリエ変換であると言える。

これらの式を使うと、これまでと同様に例えば、外側に音波が広がる際の外挿関係を波数空間にて導くことができる。

$$P_{nm}(r) = \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(ka)} P_{nm}(a) \quad (45)$$

この式は、 $r > a$ において、半径 a の球面上で観測した音圧から半径 r の球面上の音圧が外挿できることを示している。

図 9 に次数 (n, m) のいくつかに対応する球面調和関数を示す。円調和展開のときと同様に、 $n = 0$ はモノポール特性、 $n = 1$ はダイポール特性を示しており、 $Y_n^m(\theta, \phi)$ は特定のパターン、つまりモードを表している。 n や m は直接的に波数という表現

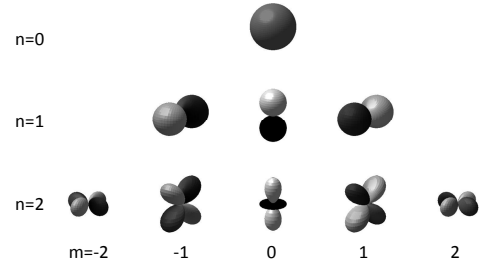


図 9 球面調和関数の実部。 $n = 0, 1, 2$ について表示。濃淡は位相を表している。

はされていないが、 n は θ 方向の波の数、 $|m|$ は ϕ 方向の波の数に対応している。

式 (43) は、半径 r 上で観測した音圧 $p(r, \theta, \phi)$ を図 9 に示すような形状の球面調和関数 $Y_n^m(\theta, \phi)$ で合成できることを示している。例えば、 $p(r, \theta, \phi)$ を放射指向特性と捉えれば、モノポールやダイポールといった基本的な指向性をどのくらいの割合で利用して目的とする指向性を実現するかという問題になっていると解釈できる。

5.3 平面波と自由空間伝達関数の球面調和関数展開 (3)(9)

本節でも平面波展開と円調和展開同様に、平面波と 3 次元自由空間内での伝達関数の球面調和関数展開の形式を記載する。また、一般に球面アレイにおいてはその内部が中空である場合より、剛球上に素子を配置することが多い。これは、アレイの作成の容易さにもつながるが、中空の場合において問題となる禁止周波数（球ベッセル関数の出力が 0 となり制御ができない周波数）を避けるという点からも意味のある選択になる。そこで、以下では、平面波と伝達関数それぞれについて中空の場合と剛球の場合での球面調和関数展開を記載する。なお、ここでは球面上に素子があることを仮定しているが、一般にはその必要はなく、その場合の式については参考文献を参照されたい。

さて、 (θ_s, ϕ_s) の方向から入射する平面波を位置 \mathbf{r} で球面調和関数展開した場合、

$$e^{j\mathbf{k}^T \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} j^n j_n(kr) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta_s, \phi_s)^* \quad (46)$$

となり、平面波の球面調和スペクトルは、

$$P_{nm}(r) = 4\pi j^n j_n(kr) Y_n^m(\theta_s, \phi_s)^* \quad (47)$$

である。今、球が中空ではなく、剛球の場合には球面調和スペクトルは、

$$P_{nm}(r) = \frac{4\pi j^{n-1}}{k^2 r^2 h_n^{(2)}(kr)} Y_n^m(\theta_s, \phi_s)^* \quad (48)$$

となる。ここで、 $h_n^{(2)}(\cdot)$ は第二種球ハンケル関数の微分である。この式は剛球マイクロホンアレイの設計などでよく使われる。

次にスピーカアレイの設計などで用いられる伝達関数について

(注 2) : ベッセル関数と球ベッセル関数、ハンケル関数と球ハンケル関数は大文字と小文字の誤植ではないので混同しないように注意すること。両者の関係は文献に詳しい⁽³⁾。

て述べる。球面上の位置 (a, θ_s, ϕ_s) にある点音源から、観測点 (r, θ_o, ϕ_o) までの伝達関数 $(r > a)$ を、

$$G(r, \theta_o, \phi_o | a, \theta_s, \phi_s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^s(k, r, a) \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_s, \phi_s)^* Y_n^m(\theta_o, \phi_o) \quad (49)$$

とし、このときの球面調和スペクトルを、

$$P_{nm}(r) = b_n^s(k, r, a) Y_n^m(\theta_s, \phi_s)^* \quad (50)$$

とすると、 $b_n^s(k, r, a)$ は、球が中空である場合と剛球である場合とでそれぞれ以下になる。

$$b_n^s(k, r, a) = \begin{cases} -jk j_n(ka) h_n^{(2)}(kr) & \text{open} \\ \frac{-1}{ka^2} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(ka)} & \text{solid} \end{cases} \quad (51)$$

6. 高臨場感再生への応用

高臨場感再生手法のひとつである波面合成⁽¹⁰⁾の研究の歴史は古く、多くの研究が行われてきている。特に最近では多チャンネル A/D, D/A 変換器の普及にともない、実際に波面を合成し、高臨場感再生を体感できるようになってきた。波面合成は、キルヒホッフの積分方程式またはレイリー積分に基礎をおいた技術であるが、誤解を恐れずに言うと、これらの方程式は、ある面からある点（面）までの音圧の内挿あるいは外挿関係を与える式である。そこで、本章では、直線アレイおよび円形アレイを用いた波面合成を、これまで説明してきた平面波展開あるいは円調和展開後の波数領域での内挿・外挿式を用いて行う方法について簡単に述べる。ここで述べる方法は波数領域に展開してから行っているだけなので従来の波面合成と本質的な意味は変わらない。

6.1 直線アレイによる波面合成

今、図 10 に示すように原音場で観測した波面を違う場において再現する波面合成を考える。波面合成では、原音場に置かれたマイクロホンで収録した信号から再現場に置かれたスピーカ駆動信号を求めることが目的となる。今、原音場において $y = y_o$ に x 軸に沿って連続的に置かれたマイクロホンアレイで観測した信号 $P(x, y_o)$ の x 軸に沿った空間フーリエ変換を $\tilde{P}(k_x, y_o)$ とする。ここで、原音場は 2 次元場だと仮定すると、3.3 節で述べたように外挿関係から、 $y = y_{\text{ref}}$ の位置での角度スペクトルは、

$$\tilde{P}^{(2D)}(k_x, y_{\text{ref}}) = \tilde{P}^{(2D)}(k_x, y_o) e^{jk_y(y_{\text{ref}} - y_o)} \quad (52)$$

として計算できる。

次に通常の 3 次元音場（ただし、自由空間）に無指向性（モノポール）のスピーカを並べて波面を合成する再現場を考える。再現場における $y = y_{\text{ref}}$ での音圧 $P^{(3D)}(x, y_{\text{ref}})$ は、

$$P^{(3D)}(x, y_{\text{ref}}) = \sum_{x_s} G^{(3D)}(x, y_{\text{ref}} | x_s, y_s) D(x_s, y_s) \quad (53)$$

である。ここで、 $D(x_s, y_s)$ は位置 (x_s, y_s) に置いたスピーカの

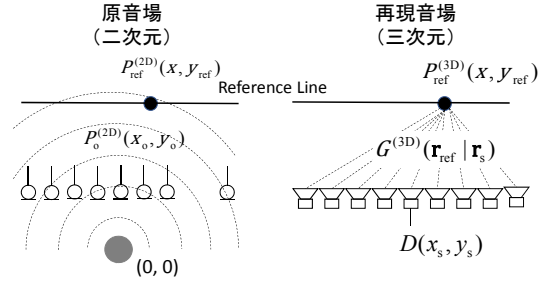


図 10 直線アレイを用いた波面合成システム

駆動信号、 $G^{(3D)}(x, y_{\text{ref}} | x_s, y_s)$ はスピーカ位置から参照位置までの 3 次元伝達関数である。 z 軸方向については考えていないので、 z は省略した。伝達関数が音源と受音点位置の距離にしか依存しないことを考慮すると、式 (53) は空間領域での畳み込み演算とみなせるので、それぞれを x 軸に沿って空間フーリエ変換すると、同じ波数の係数同士の掛け算となる。

$$\tilde{P}^{(3D)}(k_x, y_{\text{ref}}) = \tilde{G}^{(3D)}(k_x, y_{\text{ref}} - y_s) \tilde{D}(k_x, y_s) \quad (54)$$

したがって、原音場と再現場の $y = y_{\text{ref}}$ での波数スペクトル $\tilde{P}^{(2D)}(k_x, y_{\text{ref}})$ と $\tilde{P}^{(3D)}(k_x, y_{\text{ref}})$ が一致するためのスピーカ駆動信号の波数スペクトルは、

$$\tilde{D}(k_x, y_s) = \frac{\tilde{P}^{(2D)}(k_x, y_o) e^{jk_y(y_{\text{ref}} - y_o)}}{\tilde{G}^{(3D)}(k_x, y_{\text{ref}} - y_s)} \quad (55)$$

として求められる。一般にこの方法は、spectral division method と呼ばれている⁽¹¹⁾。また、この式からマイクロホン入力信号に相当する $\tilde{P}^{(2D)}$ を除くことで、スピーカに与えるフィルタとする方法も提案されている⁽¹²⁾。

今、例として、2 次元原音場で原点 $(0, 0)$ に大きさ $S(\omega)$ の点音源があったと仮定し、式 (19) を $\tilde{P}^{(2D)}$ に代入し、 $y_s = y_o$ として、 $\tilde{G}^{(3D)}(k_x, y_{\text{ref}} - y_s)$ に式 (17) を代入して得た、

$$\tilde{D}(k_x, y_s) = 2 \frac{e^{-jk_y y_{\text{ref}}}}{k_y H_0^{(2)}(k_y y_{\text{ref}})} S(\omega) \quad (56)$$

の逆空間フーリエ変換をスピーカ駆動信号とすることを考える。ここで、 M 個の素子が等間隔 d [m] で直線上に並んでいるとすると、波数は、 $k_x = \frac{2\pi n}{Md}$ ($n = -M/2 + 1, \dots, M/2$) として与える。ただし、 $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ であり、 k_y が虚数になるエバネッセント波成分はここでは無視している。図 11 に直線アレイによる波面合成の一例を示す。周波数は 1kHz、スピーカ数 64 個、スピーカ間隔 5cm とし、4m 四方を表示している。スピーカアレイは y 軸方向に 40cm 前に出ている。この例では、式 (56) の $\tilde{D}(k_x, y_s)$ にさらに $e^{jk_y y_{\text{shift}}}$ を作用させ、原音場において収録した波面を 50cm シフトさせることで、音源がスピーカ再生ラインよりも前面に飛び出す効果を生んでいる様子を示している⁽¹³⁾。

原音場に 2 次元を仮定し、3 次元で再現するシステムを 2.5 次元再現と呼ぶ。原音場として 2 次元を仮定するのは、キルヒホッフの積分方程式や内挿・外挿関係を保つという要求による。また、この場合には実際に音圧を一致させられるのは、 $y = y_{\text{ref}}$ 上だけであることに注意が必要である⁽⁶⁾。

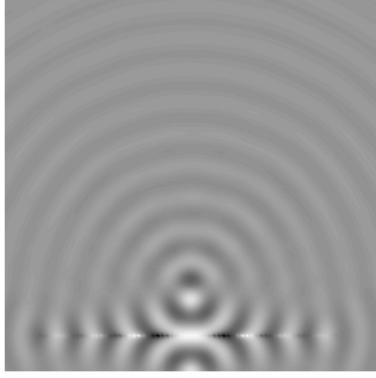


図 11 直線アレイによる波面合成の一例。表示は 4m 四方であり、直線アレイは底辺より 0.4m 上に配置し、仮想音源がさらにアレイより前方 0.5m の位置となるように波面を合成している。

6.2 円形アレイによる 2 次元波面合成

図 12 に示すように半径 r の円周上に等間隔に配置されたスピーカを用いて円外から到来した波面を円内に合成することを考える⁽¹⁴⁾。ここでは、全体を 2 次元自由空間として考えるが、3 次元として拡張することも可能である。まず、收音場において、再現場において用いるスピーカアレイの半径 r より内側に設置した半径 a の円形マイクロホンアレイで收音した音波を $P(a, \phi_o)$ とする。これを式 (28) を用いて円調展開した係数を $\tilde{P}_n(ka)$ とする。

次に再現場を構成するためのスピーカ駆動信号を考える。スピーカからマイクロホンアレイまでの伝達関数を $G(a, \phi_o | r, \phi_s)$ とすると、円形マイクロホンアレイの位置での音圧は、

$$P^R(a, \phi_o) = \sum_{\phi_s} G(a, \phi_o | r, \phi_s) D(r, \phi_s) \quad (57)$$

となる。この式は円状畳み込みとなるので、円調領域では、

$$\tilde{P}_n^R(ka) = 2\pi \tilde{G}_n(ka, kr) \tilde{D}_n(kr) \quad (58)$$

と掛け算で書ける⁽³⁾。收音信号 $P(a, \phi_o)$ と再現信号 $P^R(a, \phi_o)$ が一致するためには、円調領域において、各次数 n における $\tilde{P}_n(ka)$ と $\tilde{P}_n^R(ka)$ が一致すればよい。つまり、スピーカ駆動信号の円調係数は、

$$\tilde{D}_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \frac{\tilde{P}_n(ka)}{\tilde{G}_n(ka, kr)} \quad (59)$$

となる。今、例として ϕ_T の方向から平面波が到来するモデルベース（原音場を理論的なモデル計算式で与える場合）の波面合成を考え、 $\tilde{P}_n(ka)$ に式 (31)、 $\tilde{G}_n(ka, kr)$ に式 (32) を与えると、

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n(kr) &= \frac{1}{2\pi} \frac{j^n J_n(ka) e^{-jn\phi_T}}{-\frac{j}{4} J_n(ka) H_n^{(2)}(kr)} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{-j^{n-1} e^{-jn\phi_T}}{H_n^{(2)}(kr)} \end{aligned} \quad (60)$$

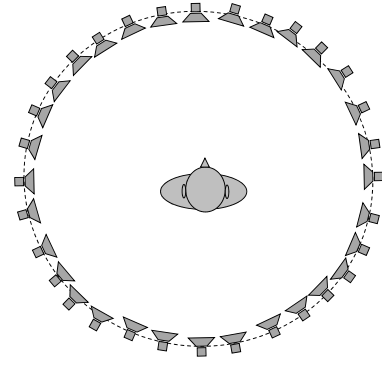


図 12 円形スピーカアレイを用いた高臨場感再生システムの例

となる。ここで、スピーカ駆動信号は、收音マイクアレイの半径に依存していない。これを円調展開式 (29) に代入すると、スピーカ駆動信号は、

$$D(r, \phi_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_n(kr) e^{jn\phi_s} \quad (61)$$

となる。図 13 に、スピーカ数 64、アレイ半径 1.5m の場合に $\phi_T = \pi/2$ から到来する周波数 1kHz の平面波を再現したときの計算機シミュレーション結果を示す。ここで示した手法は、High-Order Ambisonics (HOA) と同じと解釈している文献もある⁽¹⁵⁾。

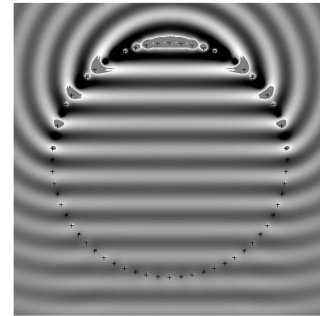


図 13 2 次元円形アレイによる平面波の合成例。スピーカ数 64 個、半径 1.5m、周波数 1kHz。

7. 指向性制御への応用

マイクロホンアレイを用いてある方向から到来する音を強調したり、スピーカアレイを用いてある方向に音を強く放射することを指向性制御と呼ぶ。マイクロホンアレイでは近年 DNN を含め音源の統計的性質に基づいた非線形処理による音声強調が盛んに研究されているが、ここでは線形系における波数領域での指向性形成について述べる。直線スピーカアレイ、円形マイクロホンアレイ、球面スピーカアレイの 3 つを例に解説するが、マイクロホンアレイ処理とスピーカアレイ処理は基本的な考え

方は同じであり、目標値（所望特性）と実現値をモードごとに合わせる mode matching あるいは modal beamformer⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾と呼ばれる手法^(注3)について述べる。

7.1 直線スピーカアレイ

x 軸上に M 個のスピーカが等間隔 d [m] で並んだ直線スピーカアレイを用いて指向性を制御することを考える。スピーカ素子は無指向性を仮定する。スピーカ列に垂直な方向に指向性に向ける場合をブロードサイド型、スピーカ列の軸上に指向性に向ける場合をエンドファイア型と言うが、ここでは軸に垂直な方向に指向性に向けることにする。指向性を形成する方法は種々提案されているが、図 14 に示すように、音を受聴するエリアに空間窓を仮定し、空間窓の内側では音圧が高く、その外側で音が低いという目標値を設定することでフィルタ係数を求める方法を紹介する⁽¹⁸⁾。今、位置 $(x_s, 0)$ にあるスピーカの駆動信号を $D(x_s, 0)$ とすると、 (x_o, y_o) で観測した音圧 $P(x_o, y_o)$ は、

$$P(x_o, y_o) = \sum_{s=1}^M G(x_o, y_o | x_s, 0) D(x_s, 0) \quad (62)$$

となる。ここで、 $G(x_o, y_o | x_s, 0)$ は、各スピーカから観測点までの伝達関数である。 $y = y_o$ の x 軸に平行な線上のある範囲内、例えば $-x_w < x_o < x_w$ のみ音があり、範囲外では音圧がゼロになるようにするためには、例えば、式 (62) において、左辺に

$$W(x_o) = \begin{cases} 1 & |x_o| < x_w \\ 0 & |x_o| > x_w \end{cases} \quad (63)$$

となる空間的な方形窓を掛け、これを目標値（所望特性）とすることができる。

$$W(x_o)P(x_o, y_o) = \sum_{s=1}^M G(x_o, y_o | x_s, 0) D(x_s, 0) \quad (64)$$

この式の両辺をそれぞれ x 軸方向に空間フーリエ変換すると、

$$\sum_{k'_x} \tilde{W}(k'_x) \tilde{P}(k_x - k'_x, y_o) = \tilde{G}(k_x, y_o) \tilde{D}(k_x, 0) \quad (65)$$

となる。ここで、左辺に畳み込み演算が現れていることに注意が必要である。フーリエ変換において、時間領域の畳み込みが周波数領域では掛け算になることを思い出してほしい。これは逆においても成り立ち、時間領域の掛け算、すなわち窓関数を時間サンプル信号にかけ合わせることは、周波数領域では畳み込み演算となることと同じである。一方、式 (64) の右辺は畳み込み演算のため、式 (65) では掛け算になっている。

さて、今、空間窓をかけた領域において生成される波面の進行方向を $\phi = \pi/2$ に限定する、すなわち図のように x 軸に平行な波面のみが y 軸方向に進行すると仮定する ($P(x_o, y_o) = e^{-jk_y y_o}$) と、 $k_x = k \cos \pi/2 = 0$ のときのみ、すなわち $\tilde{P}(0, y_o) e^{-jk_y y_o}$ のみが目標値となる。すなわち、左辺の和は $k_x - k'_x = 0$ のときのみ生き残り、

(注3)：波面合成の分野では spectral division method と呼ばれている。

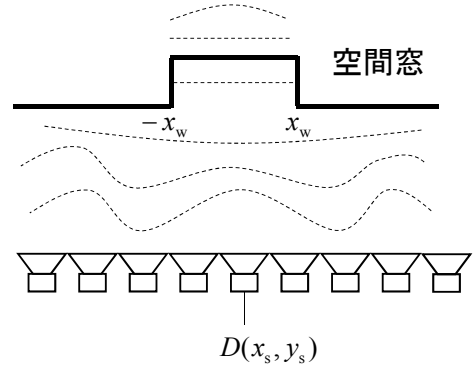


図 14 空間窓を用いた直線スピーカアレイによる指向性制御のイメージ。

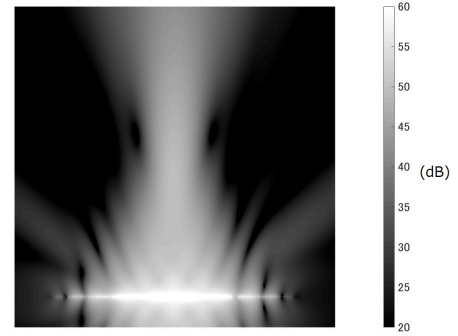


図 15 空間窓を用いた直線スピーカアレイによる指向性形成の例

$$\tilde{W}(k_x) \tilde{P}(0, y_o) = \tilde{G}(k_x, y_o) \tilde{D}(k_x, 0) \quad (66)$$

とシンプルな形式になる。この式から $\tilde{D}(k_x, 0)$ を求め、逆フーリエ変換を行えばスピーカの駆動信号を得ることができる。この駆動信号は、信号の大きさを 1 であると仮定しているので、スピーカに与えるフィルタと考えてもよい。 $k_x = 0$ の波面を作るために、それ以外の波数（それ以外の方向の平面波）を利用していることに注意が必要である。図 15 に $M = 64$ 個のスピーカを 5cm 間隔で並べた直線アレイによるシミュレーション結果を示す。ターゲットとするエリアは、アレイから y 軸方向に 2m 離れた場所にスピーカ長の 1/6 に当たる 0.53 m として方形窓として設定した。このとき、方形窓のフーリエ変換は sinc 関数となるので、波数領域の $\tilde{W}(k_x)$ として以下の sinc 関数を直接与えた。

$$\tilde{W}(k_x^{(n)}) = \frac{\sin(n\pi/6)}{n\pi} \quad (67)$$

ただし、 $k_x^{(n)} = \frac{2\pi n}{Md}$ であり、 $n = -M/2 + 1, \dots, M/2$ である。また、 $\tilde{G}(k_x, y_o)$ には 3 次元の自由空間伝達関数の空間フーリエ変換である式 (17) を与えた。図では 4m 四方の範囲を表示しており、色の濃淡が音の大きさを表しており、正面方向に指向性が形成できていることがわかる。

7.2 円形マイクロホンアレイ

半径 r の円周上に等角度間隔で $\phi_l = 2\pi l/M$ ($l =$

$0, 1, \dots, M-1$) でマイクロホンが M 個配置されたマイクロホンアレイを考える。今、位置 (r, ϕ_l) のマイクロホンで収音した ϕ 方向から到来する平面波を $p(r, \phi_l|\phi)$ とし、各マイクロホンの後段に設置されたフィルタの係数を $w(\phi_l)$ とすると、マイクロホンアレイ出力は

$$y(\phi) = \sum_{l=0}^{M-1} w(\phi_l) p(r, \phi_l|\phi) \quad (68)$$

である。平面波の到来角 ϕ を変えながら得た出力 $y(\phi)$ の大きさは指向性そのものである。平面波 $p(r, \phi_l|\phi)$ は、その大きさを 1 であると仮定すると、アレイへの入射波の向きを考えながら式 (31) に示したヤコビ・アンガーの公式を使うことで、

$$\begin{aligned} p(r, \phi_l|\phi) &= e^{jkr \cos(\phi - \phi_l)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(kr) e^{jn\phi} e^{-jn\phi_l} \end{aligned} \quad (69)$$

と展開できる。一方、フィルタ係数の円調和展開は、

$$w(\phi_l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{w}_n e^{jn\phi_l} \quad (70)$$

なので、(68) に (69) と (70) を代入し、 $e^{jn\phi_l}$ の直交性を利用すると、

$$y(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{w}_n j^n J_n(kr) e^{jn\phi} \quad (71)$$

が得られる。次に、目標となる指向特性を $d(\phi)$ として、(71) に合わせて $e^{jn\phi}$ で展開する。

$$d(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{d}_n e^{jn\phi} \quad (72)$$

この式と (71) を同じ n の項で比較すると、

$$\tilde{w}_n = \frac{\tilde{d}_n}{b_n(kr)} \quad (73)$$

とおけば両者が一致することが分かる⁽¹⁹⁾。ここで、 $b_n(kr) = j^n J_n(kr)$ とおいた。素子に対応するフィルタ係数は、式 (70) から求められ、円形アレイのフィルタ係数は各モードの線形和で合成される。同じ次数 n 同士 (同じ波数同士) で係数を求めることは *mode matching* と呼ばれる⁽¹⁶⁾。所望方向によらずに指向性パターンを同一にする場合、次数 n は $-N \leq n \leq N$ のように正負で対称の次数とすべきである。 N は最大でも $(M-1)/2$ の小数点以下を切り捨てた値である。また N は周波数依存性があり、通常は kr より小さな値が採用される。

さて、 $\tilde{d}_n = e^{-jn\phi_s}$ とすると、 ϕ_s 方向から到来する平面波を強調するアレイとなる。図 16 に、 $\tilde{d}_n = 1 (\phi_s = 0)$ 、 $M = 8$ の場合の指向特性を実線で示す。 $\phi = 2\pi l / (M-1) (l = 1, \dots, M-2)$ の方向のみ 0 になり、その他の方向にはサイドローブがリップルとして現れる。このサイドローブは \tilde{d}_n に異なる値を与えることで低減でき (例えば、図 16 破線)、波数領域で円形アレイのフィルタ設計をするということは、適切な \tilde{d}_n を設計するという問題になる。ただし、鋭い指向性を求めようとすると、次節で述べるホワイトノイズの増大を招くので注意が必要である。

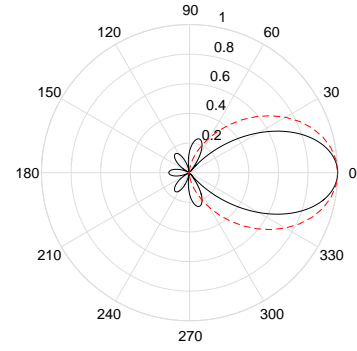


図 16 円形マイクロホンアレイを用いた指向性形成の例。 $(M = 8)$ 。実線： $\tilde{d}_n = 1$ 、破線：前後比最大化法。

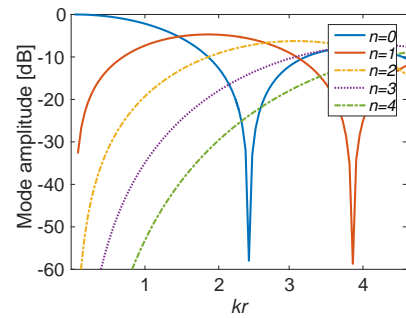


図 17 Mode strength $b_n(kr)$ の大きさ (dB)。

7.2.1 ホワイトノイズゲインとフィルタゲイン

一般に波長に比べて小さなサイズのアレイを用いて指向性制御を行うと、低域のフィルタゲインが上昇し、機器雑音などが大きくなり特に低域での S/N 比が悪化する。この問題は、ホワイトノイズゲイン⁽²⁰⁾

$$\text{WNG}(\omega) = \frac{|y(\phi_{\text{target}}, \omega)|^2}{\sum_{l=0}^{M-1} |w(\phi_l, \omega)|^2} \quad (74)$$

という指標で評価される。WNG は所望方向 ϕ_{target} のアレイ出力のエネルギーをフィルタ係数のエネルギーの総和で割ったものになっており、値が大きいほど、つまり同じ出力を得るためのフィルタ係数が小さいほどマイクロホンアレイのロバスト性が高いと評価される。同じ問題はスピーカアレイにおいても生じ、例えば低域においてフィルタ係数が大きいと個々のスピーカに対して大きな音を入力することになり、音が歪み、結果として指向性が形成できなくなる要因となる。一般にフィルタ係数の大きさを制限する手法として正則化パラメータが導入されているが、モードマッチング法では、その原因を解析的に考えることができる。

まず、式 (70) から、円形アレイのフィルタ係数は、各モード $e^{jn\phi_l}$ を \tilde{w}_n で重み付けした線形和である。式 (73) から、係数 \tilde{w}_n は、 $b_n(kr) = j^n J_n(kr)$ に依存し、 $b_n(kr)$ が小さければ \tilde{w}_n が大きくなることから分かる。ここで、 $b_n(kr)$ は、mode strength あるいは mode amplitude と呼ばれ⁽²⁰⁾⁽²¹⁾、各モード、例えば、 $n = 0$ であればそのアレイで表現したモノポールの指向特性が持つ収音感度、 $n = 1$ であれば、そのアレイが作り出

すダイボールの指向特性が持つ收音感度に対応している。図 17 に $b_n(kr)$ のパワーを示す。この図から、例えば半径 5 cm のアレイでは、周波数 1,082 Hz で $kr \sim 1.0$ であり、この周波数で次数 2 や 3 のモードを用いて鋭い指向性を形成しようとする、收音感度が下がってしまい、アレイ出力の周波数応答を平坦に保とうとすると、フィルタゲインを上昇せざるを得なくなる。これを回避するためには、低い周波数においては指向性を犠牲にして高次のモードを使わないという次数制限が必要となる。

ちなみに、これは一般的にも言えることだが、周波数領域でフィルタ係数を求めたあとは、必ず時間領域のフィルタに変換して、時間応答がどうなっているか（例えば、両脇に向かって収束しているか）確認してほしい。また、周波数特性のばらつきが多く、どこかの周波数で発散傾向になっていないかなど気にするような癖をつけてほしい。

7.3 球面スピーカアレイ

球面上に等間隔（例えば、正 12 面体の各面）に M 個のスピーカが配置された半径 a の球面スピーカアレイの指向性制御について考える。球面スピーカアレイの構成例を図 18 に示す。

球面上の M 個のスピーカの前段にフィルタ $w(\theta_s, \phi_s)$ を設置すると、観測点 (r, θ, ϕ) での音圧は、

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{s=0}^{M-1} G(r, \theta, \phi | a, \theta_s, \phi_s) w(\theta_s, \phi_s) \quad (75)$$

となる。円形アレイのときと同様に伝達関数に式 (49) を代入し、フィルタ係数の球面調和関数展開

$$w(\theta_s, \phi_s) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} w_{n'm'} Y_{n'}^{m'}(\theta_s, \phi_s) \quad (76)$$

も代入すると、 $Y_n^m(\theta, \phi)$ の完全直交性から、

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n w_{nm} b_n^S(k, r, a) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (77)$$

が得られる。ここで、 w_{nm} はフィルタの球面調和関数展開係数である。今、目標とする指向特性を $d(\theta, \phi)$ とし、これを球面調和関数展開して得られた係数 d_{nm} と mode matching を行えば、波数領域におけるフィルタ係数は、

$$w_{nm} = \frac{d_{nm}}{b_n^S(k, r, a)} \quad (78)$$

となる。ただし、前述したとおりフィルタゲインと指向性の間にはトレードオフがあるので、 $b_n^S(k, r, a)$ の大きさを見ながら、適切な次数を選択する必要がある。また、中空アレイの場合、 $b_n^S(k, r, a)$ がゼロになり、フィルタ係数が発散するいわゆる禁止周波数があるが、剛球アレイを用いることでこれを回避することができる⁽²²⁾。ここで、 $b_n^S(k, r, a)$ は式 (51) で与えられる。通常、利用可能な最大次数 N は、スピーカの配置によって異なるが⁽⁹⁾、等密度配置では $\alpha(N+1)^2 < M$ であり、経験上、 $\alpha = 1.3 \sim 1.5$ である。これは、自由度 $(N+1)^2$ がスピーカ数 M に比べて減少していること、つまり指向性の表現能力が減少していることを意味する。また、周波数は $kr < N$ に制限

される。しかしながら、円調和展開や球面調和展開を用いて設計したフィルタ係数は、指向性の形を維持したまま回転が行えるという利点がある⁽²³⁾。また、フィルタゲインの増大の原因を解析しやすいため、その対策も考えやすい。図 19 に例として正 12 面体の各面にスピーカを配置したスピーカアレイを用いて 2 次までの球面調和関数によって作成可能な指向性を示す。図において、右の指向性は、左の 3 つのモードの係数として、 $d_{0,0} = 1, d_{1,0} = \sqrt{3}, d_{2,0} = \sqrt{5}$ を与え、その他を 0 にした結果である。

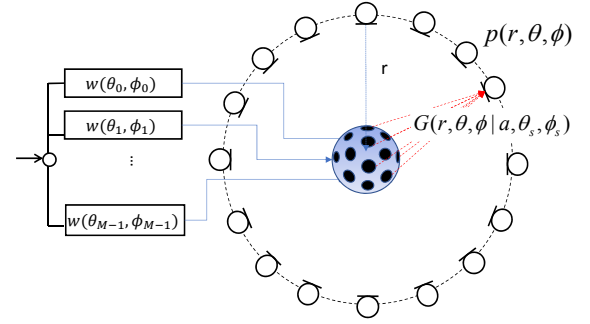


図 18 球面スピーカアレイの構成例

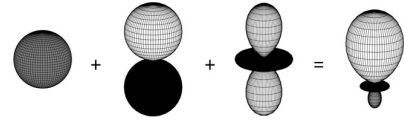


図 19 球面調和関数の各モードの和による指向性形成のイメージ

7.3.1 従来アルゴリズムの適用

式 (75) と式 (77) は右辺の形式が異なるが、左辺の $p(r, \theta, \phi)$ は同じである。通常、式 (75) をベクトルと行列で表現することで、最小分散法や最尤推定法により、フィルタ係数 $w(\theta_s, \phi_s)$ を直接求めることができる⁽¹⁾。一方、式 (77) も同様に w_{nm} をベクトル化し、 $b_n^S(k, r, a) Y_n^m(\theta, \phi)$ を行列にすることで、

$$\mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (79)$$

と表現することで、従来の最小分散法や最小二乗法のアルゴリズムがそのまま適用可能となる⁽⁹⁾。ここで、

$$\mathbf{p} = [p(r, \theta_1, \phi_1), p(r, \theta_2, \phi_2), \dots, p(r, \theta_L, \phi_L)]^T \quad (80)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} b_0 Y_0^0(\theta_1, \phi_1) & b_1 Y_1^{-1}(\theta_1, \phi_1) & \cdots & b_2 Y_2^2(\theta_1, \phi_1) \\ b_0 Y_0^0(\theta_2, \phi_2) & b_1 Y_1^{-1}(\theta_2, \phi_2) & \cdots & b_2 Y_2^2(\theta_2, \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0 Y_0^0(\theta_L, \phi_L) & b_1 Y_1^{-1}(\theta_L, \phi_L) & \cdots & b_2 Y_2^2(\theta_L, \phi_L) \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{w} = [w_{0,0}, w_{1,-1}, w_{1,0}, w_{1,1}, w_{2,-1}, \dots, w_{2,2}]^T \quad (82)$$

である。円形アレイでも同様に、円調和展開係数を求めるために従来のアルゴリズムを適用することが可能である。

8. その他のトピックス

8.1 動径方向フィルタリング

直線アレイでは x, y, z 軸の 3 つの方向に対して区別なく平面波展開が可能である。一方で、円形アレイと球面アレイにおいては角度方向 (θ, ϕ) に対する空間フーリエ変換についてのみ述べてきた。ここでは、これらのアレイにおいてここまで触れてこなかった半径 r 方向（動径方向）に関するフィルタリングについて述べる。今、式 (77) において (θ, ϕ) を固定し、 r に着目した式として書き換える。

$$\hat{p}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n w_{nm} B_n^m(r) \quad (83)$$

ここで、 $B_n^m(r) = b_n^S(k, r, a) Y_n^m(\theta, \phi)$ である。この式において、 $\hat{p}(r)$ を距離に関しての目標値として設定し、これを実現するような w_{nm} を求める方法が動径方向フィルタリング (radial filtering) として提案されている⁽²⁴⁾。この式は波の動径方向への展開式に含まれるベッセル関数が図 7 に示したように次数ごとに異なる振る舞いをしていることを積極的に利用するものである。動径方向フィルタリングを用いることで、近距離場のみの音声を収音するといったエリア内の収音が期待できる。

8.2 Multizone 再生

円形アレイを用いた波面合成では、円の中心において波面を再現することが通常行われるが³、ベッセル関数の加法定理

$$J_n(kr_2)e^{jn\phi_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_1)e^{jm\phi_1} J_{m-n}(kr_0)e^{-j(m-n)\phi_0} \quad (84)$$

を応用することで再現位置を円の中心から移動させる方法が提案されている⁽²⁵⁾。

また、これらを複数個組み合わせることで、円の中心以外の複数の円内において異なる波面を再現する手法も提案されている。図 20 に半径 0.8m、スピーカ数 64 個で 2 つのゾーンを再現した例を示す。周波数は 2kHz で上の円内では音圧が 0 で、下の円内には斜め方向からの平面波を再現している。

8.3 その他

アレイ信号処理におけるフィルタ係数を円調和展開や球面調和関数展開領域の展開係数（モードごとの係数）として求め、その後合成することで素子に括りつけられたフィルタ係数とする方法をこれまで述べてきた。これに対し、モード合成を行う際に、正の次数あるいは負の次数のみで合成することで、例えば

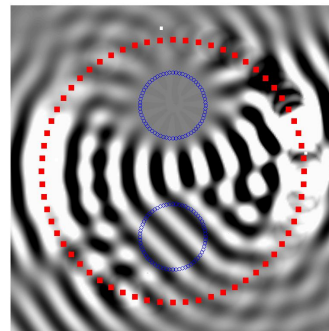


図 20 円形アレイを用いた 2 ゾーン制御の例。■はスピーカ位置を表す。上方の小円内は無音領域、下方の小円内には斜めから進行してくる平面波を再現している。

円形アレイ内の波面合成において、片側半面だけ波面を合成することが提案されている。また、音場の展開係数を正規化したのちにフィルタ係数を求めることでフィルタゲインの増大を抑えながら円内に焦点音源を形成する方法も提案されている⁽²⁶⁾。

この例以外にも波数領域のフィルタ係数に関する操作が物理的な事象とどのように結びついているかを研究することは興味深い。また、動径方向に関するベッセル関数やハンケル関数に関しては多くの公式が存在するので、これらに応用することで新しい音場制御に挑戦してほしい。

9. おわりに

本解説記事では、3 つの座標系に対する空間フーリエ変換の基底をそれぞれの座標系での波動方程式の解と結び付けて解説した。また、空間フーリエ変換後の波数領域にてアレイ処理を実行する応用例として、波面合成と指向性制御について説明した。空間フーリエ変換を用いると畳み込み演算が掛け算になるという単なる演算上のテクニックだけではなく、物理的な事象をとらえやすくなる、今までとは異なるアプローチが考えられる、などメリットを感じ取っていただけると幸いである。本解説ではまだハードルが高いという読者は合わせて参考文献⁽²⁷⁾を読んでみてほしい。

献

- (1) 浅野太, “音のアレイ信号処理,” コロナ社, 2011.
- (2) 安藤彰男, “高臨場感音響技術とその理論,” 電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, vol. 3, no. 4, pp. 33-36, 2010.
- (3) E. G. Williams, “フーリエ音響学,” シュプリンガー・ジャパン, 2005.
- (4) 鈴木陽一, 赤木正人, 伊藤彰則, 佐藤洋, 荻木禎史, 中村健太郎, “音響学入門,” コロナ社, 2011.
- (5) 日本音響学会編, “音響学入門ペディア,” コロナ社, 2017.
- (6) J. Ahrens, “Analytic Methods of Sound Field synthesis,” Springer, 2012.
- (7) S. Koyama, “Boundary Integral Approach to Sound Field Transform and Reproduction,” Doctor thesis, The University of Tokyo, 2014.

- (8) ジョージ・アルフケン, “特殊関数と積分方程式,” 講談社, 1978.
- (9) B. Rafaely, “Fundamentals of Spherical Array Processing,” Springer, 2015.
- (10) A. J. Berkhout, D. de Vries and P. Vogel, “Acoustic control by wave field synthesis,” J. Acoust. Soc. Am., 93, pp. 2764-2778, 1993.
- (11) J. Ahrens and S. Spors, “Sound Field Reproduction Using Planar and Linear Arrays of Loudspeakers,” IEEE trans. Audio, Speech, Lang. vol. 18, no. 8, pp. 2038-2050, 2010.
- (12) S. Koyama, K. Furuya, H. Hiwasaki, Y. Haneda, “Analytical Approach to Wave Field Reconstruction Filtering in Spatio-Temporal Frequency Domain,” IEEE trans. Audio, Speech, Lang. vol. 21, no. 4, pp. 685-696, 2013.
- (13) S. Koyama, K. Furuya, H. Hiwasaki, Y. Haneda, “Design of transform filter for reproducing arbitrarily shifted sound field using phase-shift of spatio-temporal frequency,” IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), DOI: 10.1109/ICASSP.2012.6287896, 2012.
- (14) J. Ahrens and S. Spors, “An Analytical Approach to Sound Field Reproduction Using Circular and Spherical Loudspeaker Distributions,” Acta Acustica united with Acustica, vol. 94, no. 6, pp. 988-999, 2008.
- (15) J. Daniel, R. Nicol and S. Moreau, “Further Investigations of High-Order Ambisonics and Wavefield Synthesis for Holophonic Sound Imaging,” Audio Engineering Society (AES), 114th AES Convention, Amsterdam, The Netherlands, March 2003.
- (16) M. Poletti, “Unified Theory of Horizontal Holographic Sound Systems,” J. Audio Eng. Soc., vol. 48, No.12, pp. 1156-1182, 2000.
- (17) J. Meyer and G. Elko, “A highly scalable spherical microphone array based on an orthonormal decomposition of the soundfield,” IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2002.
- (18) T. Okamoto, “Experimental validation of spatial Fourier transform-based multiple sound zone generation with a linear loudspeaker array,” J. Acoust. Soc. Am., vol. 141, no. 3, pp. 1769-1780, 2017.
- (19) H. Teutsch and W. Kellermann, “Acoustic source detection and localization based on wavefield decomposition using circular microphone arrays,” J. Acoust. Soc. Am., vol. 120, no. 5, pp. 2724-2736, 2006.
- (20) Y. Huang and J. Benesty, “Audio Signal Processing for Next Generation Multimedia Communication Systems,” Kluwer Academic, 2004.
- (21) D. P. Jarrett, E. A. P. Habets, and P. A. Naylor, “Theory and Applications of Spherical Microphone Array Processing,” Springer, 2017.
- (22) B. Rafaely, “Analysis and design of spherical microphone arrays,” IEEE trans. Audio, Speech, Lang. vol. 13, no. 1, pp. 135-143, 2004.
- (23) K. Bando and Y. Haneda, “Interactive Directivity Control Using Dodecahedron Loudspeaker Array,” Journal of Signal Processing, vol. 20, no. 4, pp. 209-212, 2016.
- (24) E. Fisher and B. Rafaely, “Near-Field Spherical Microphone Array Processing With Radial Filtering,” IEEE trans. Audio, Speech, Lang. vol. 19, no. 2, pp. 256-265, 2011.
- (25) Y. J. Wu and T. D. Abhayapala, “Spatial Multizone Soundfield Reproduction: Theory and Design,” IEEE trans. Audio, Speech, Lang. vol. 19, no. 6, pp. 1711-1720, 2011.
- (26) M. Poletti, “Sound field control for the creation of multizone and focused sound fields –Approaches based on spatial mode control–,” 信学技報. EA2017-63, vol. 117, no. 328, pp. 31-36, 2017.
- (27) 羽田陽一, “空間フーリエ変換を用いたアレイ信号処理,” 日本音響学会誌, vol. 74, no. 2, pp. 74-82, 2018.

羽田陽一 (正員: シニア会員)

1987 年東北大学理学部物理学科卒業。1989 年同大学院理学研究科物理学専攻博士前期課程修了。同年日本電信電話株式会社 (NTT) 入社。2012 年 10 月から電気通信大学 大学院情報理工学研究科 教授。博士 (情報科学, 東北大)。音響伝達関数のモデル化, 音響エコーキャンセラ, マイクロホンアレイ, スピーカアレイの研究に従事。1996 年電子情報通信学会学術奨励賞, 1997 年電子情報通信学会第 34 回業績賞, 1998 年日本音響学会粟屋潔学術奨励賞, 2001 年電子情報通信学会論文賞, 同年日本音響学会佐藤論文賞受賞。電子情報通信学会, 日本音響学会, 米国音響学会, AES, IEEE 各会員。2017 年 5 月より日本音響学会副会長。